

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

Моделювання вимушених коливань одномасової динамічної системи токарного верстата

Мета роботи: набуття та вдосконалення навичок моделювання в пакеті *VisSim* і вивчення характеру вимушених коливань елементів верстата.

Об'єкти вивчення

Спрощена динамічна система токарного верстата.

Обладнання

Персональний комп'ютер із встановленим ліцензійним програмним забезпеченням *VisSim* та *MathCad*.

1 Теоретичні відомості

Сучасний розвиток машинобудування супроводжується підвищенням потужності і швидкісних характеристик машин при одночасному зростанні їх надійності і точності. Для цього необхідно підвищення точності виготовлення деталей, поліпшення геометричних і фізико-механічних властивостей їх поверхневого шару, що визначає експлуатаційні характеристики машин. Геометричні похибки, зокрема хвилястість оброблюваної поверхні, істотно впливають на контактну жорсткість, зносостійкість, герметичність з'єднань, шум та інше.

Одним із шляхів підвищення якості обробки деталей є ослаблення вимушених коливань верстата, переданих через фундамент від зовнішніх джерел. Рівень вимушених коливань верстата знижується при установці верстата на віброізолюючі пристрої та фундаменти. Тому віброізоляція верстатів повинна бути більш ретельною.

Оцінка вібростійкості верстата як замкнутої динамічної системи дає можливість за характеристиками пружної системи судити про коливання у верстаті під час обробки. Динамічні характеристики пружної системи залежать від таких основних параметрів верстата, як маса і момент інерції основних вузлів і деталей, жорсткість елементів несучої системи, сили опору (демпфірування), пов'язані головним чином з тертям у з'єднаннях.

Для визначення динамічних характеристик несучої системи, а саме, амплітудно-частотних і амплітудно-фазових частотних характеристик, необхідна наявність динамічних моделей ТЗ, які можуть бути побудовані на основі конкретної розрахункової схеми.

Так, для токарного верстата розрахункова схема в загальному вигляді може бути зведена до 9 масам і 18 ступенями свободи на плоскій моделі (рис. 1).

На схемі позначені індексами мас відповідно станина M_1 , електродвигун M_2 , з насосом гідроприводу, супорт M_3 , різцетримач M_4 ,

привод M_5 переміщення інструмента, деталь M_6 , бабка M_7 , електродвигун M_8 головного руху, шпиндель M_9 .

Символами j позначена жорсткість, а b – коефіцієнт демпфування, де подвійні індекси – це стики між відповідними масами або коефіцієнти впливу.

Після побудови розрахункової схеми слід перейти до складання диференціальних рівнянь коливань для кожної маси. Рішення системи диференціальних рівнянь для багатомасової системи дасть можливість побудувати амплітудно-частотні характеристики для будь-якої системи навантаження і для будь-якої маси системи.

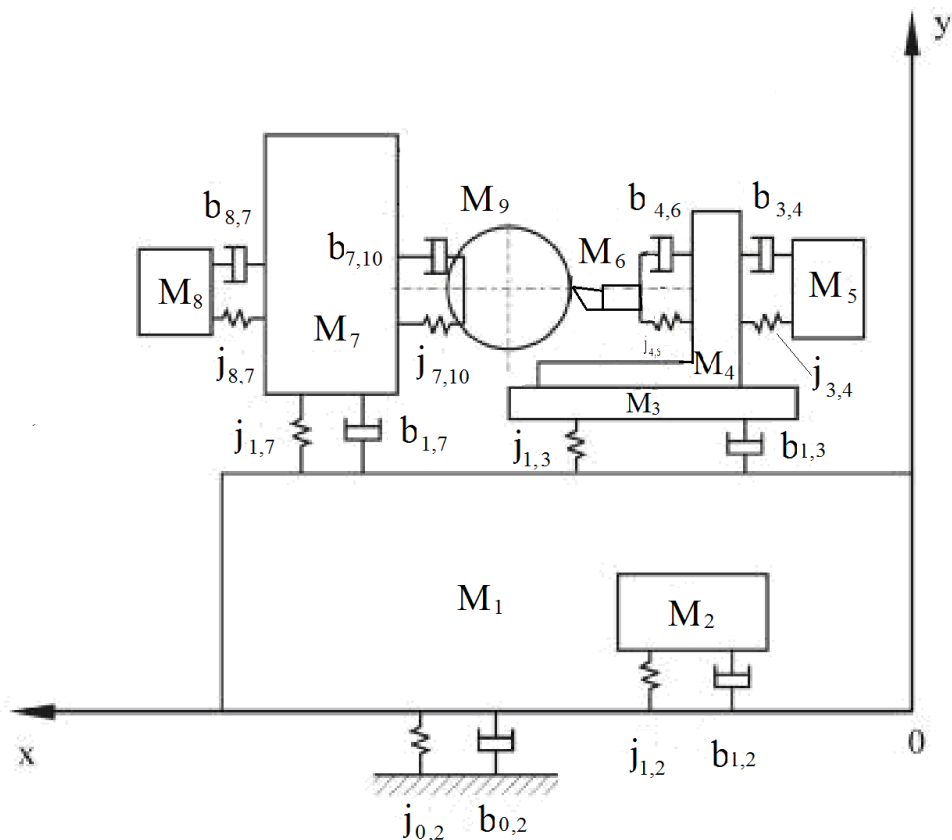


Рисунок 1 – Розрахункова схема несучої системи токарного верстата

Проте в реальності такі багатомасових системи являють собою досить складні і громіздкі математичні моделі, у зв'язку з чим їх замінюють спрощеними.

Така спрощена система, що здійснює вимушені коливання показана на рис. 2.

При вільних коливаннях рух системи залежить тільки від початкових умов і її фізичних характеристик j і t , які визначають частоту її власних коливань. Якщо система піддається деяким зовнішнім впливам, наприклад залежними від часу силами, то динамічна поведінка системи стає більш

складною. Рух системи при зазначених умовах називають вимушеними коливаннями.

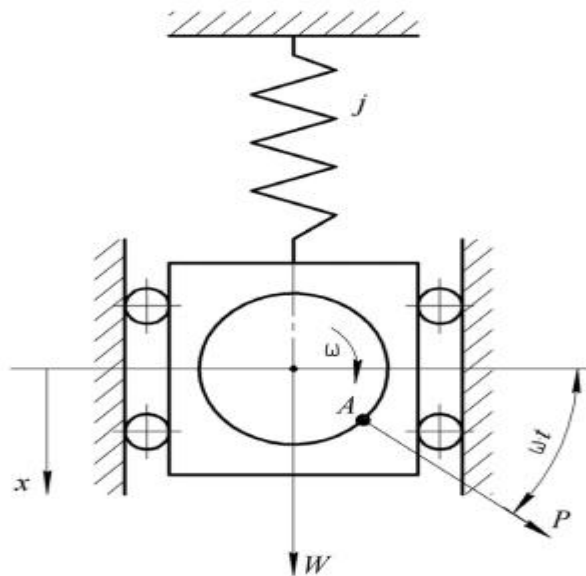


Рисунок 2 – Вимушені коливання без демпфування

На рис. 2 показаний електродвигун вагою W , підвішений на пружині жорсткістю j . Ротор двигуна обертається з постійною кутовою швидкістю ω і недостатньо збалансований, що на рис. 2 показано у вигляді ексцентричної маси, зосередженої у точці A . Цей дисбаланс буде породжувати обертову відцентрову силу P , яка, в свою чергу, викличе вимушені коливання системи. У доповненні до сили тяжіння і сили реакції пружини тепер враховуємо вертикальну компоненту $P \cdot \sin(\omega \cdot t)$ вектора обертаючої сили. В результаті отримаємо наступне рівняння руху:

$$m \cdot \ddot{x} = W - j \cdot (\delta + x) + P \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (3.1)$$

Вводячи в (3.1) позначення:

$$\begin{cases} a^2 = \frac{j}{m}; \\ q = \frac{P}{m}, \end{cases}$$

отримаємо:

$$x + a^2 \cdot x = q \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (3.3)$$

Вирішуємо це рівняння операційним методом при наступних початкових умовах:

$$\begin{cases} x(t)|_{t=0} = x_0 \\ \dot{x}(t)|_{t=0} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Виконуємо перетворення Лапласа над (3.3)

$$s^2 \cdot x(s) - s \cdot x_0 - \dot{x}_0 + a^2 \cdot x(s) = q \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (3.4)$$

Вирішуємо отриманий вираз щодо зображення $x(s)$ шуканої функції $x(t)$:

$$x(s) = x_0 \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} + \frac{\dot{x}_0}{a} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} + \frac{q \cdot \omega}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s^2 + a^2)} \quad (3.4)$$

Для перших двох доданків (3.4) зворотнє перетворення Лапласа можна відразу виконати, користуючись таблицею 2 Додатку 1. Третій доданок розкладемо на прості дроби:

$$\frac{q \cdot \omega}{(s^2 + \omega^2) \cdot s^2 + a^2} = \frac{A \cdot s + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{C \cdot s + D}{s^2 + a^2} \quad (3.5)$$

де A, B, C, D – постійні величини. Зведемо праву частину (3.5) до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} & \frac{q \cdot \omega}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s^2 + a^2)} = \\ & = \frac{A \cdot s^3 + A \cdot a^2 \cdot s + B \cdot s^2 + B \cdot a^2 + C \cdot s^3 + C \cdot \omega^2 \cdot s + D \cdot s^2 + D \cdot \omega^2}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s^2 + a^2)} \end{aligned}$$

Постійні A, B, C, D знайдемо прирівнявши співмножники при однакових ступенях S в чисельнику лівої і правої частин (3.6). В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} A + C &= 0, \rightarrow A = -C; \\ B + D &= 0, \rightarrow B = -D; \\ A \cdot a^2 + C \cdot \omega^2 &= 0, \rightarrow A \cdot a^2 + A \cdot \omega^2 = 0, \rightarrow \begin{cases} A = 0; \\ C = 0; \end{cases} \\ B \cdot a^2 + D \cdot \omega^2 &= q \cdot \omega \rightarrow B \cdot a^2 - B \cdot \omega^2 = q \cdot \omega \rightarrow B = \frac{q \cdot \omega}{a^2 - \omega^2}; \\ D &= -\frac{q \cdot \omega}{a^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Таким чином:

$$\frac{q \cdot \omega}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s^2 + a^2)} = \frac{q \cdot \omega}{(s^2 + \omega^2) \cdot (a^2 - \omega^2)} - \frac{q \cdot \omega}{(s^2 + a^2) \cdot (a^2 - \omega^2)}$$

$$= \frac{q}{a^2 - \omega^2} \cdot \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{a} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} \right].$$

Підставимо отриманий вираз замість третього доданка в (3.4) і отримаємо:

$$x(s) = x_0 \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} + \frac{\dot{x}_0}{a} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} + \frac{q}{a^2 - \omega^2} \cdot \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{a} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} \right].$$

Виконуємо зворотнє перетворення над $x(s)$, тобто знаходимо $x(t)$:

$$x(t) = L^{-1}[x(s)] =$$

$$= x_0 \cdot \cos(a \cdot t) + \frac{\dot{x}_0}{a} \cdot \sin(a \cdot t) + \frac{q}{a^2 - \omega^2} \cdot \left[\sin(\omega \cdot t) - \frac{\omega}{a} \cdot \sin(a \cdot t) \right]$$

$$= x_0 \cdot \cos(a \cdot t) + \left(\frac{\dot{x}_0}{a} - \frac{q \cdot \omega}{a \cdot (a^2 - \omega^2)} \right) \cdot \sin(a \cdot t) + \frac{q}{a^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

(3.7)

Два перших доданки (3.7) описують вільні коливання з частотою a . Третя складова, залежно від збурюючої сили, характеризує вимушені коливання. Підставляємо значення (3.2) в (3.7) і вважаючи вільні коливання несуттєвими, отримуємо так звані встановленні вимушені коливання, що описуються виразом:

$$x = \frac{q \cdot \sin(\omega \cdot t)}{a^2 \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{a^2}\right)} = \frac{P \cdot \sin(\omega \cdot t)}{m \cdot \frac{j}{m} \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{a^2}\right)} = \frac{P}{j} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{a^2}} \right) \quad (3.8)$$

Множник $(P/j) \cdot \sin(\omega \cdot t)$ – переміщення, обумовлене протидіючою силою $P \cdot \sin(\omega \cdot t)$, якщо вона прикладена статично. Множник

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{a^2}\right)}$$

– враховує динамічний характер сили. Абсолютна величина цього множника зазвичай називається коефіцієнтом підсилення або динамічним коефіцієнтом β :

$$\beta = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{a^2}} \right|.$$

Залежність β від відношення ω/a , тобто відношення частоти ω збуджуючої сили до частоти власних коливань, показана на рис. 3.

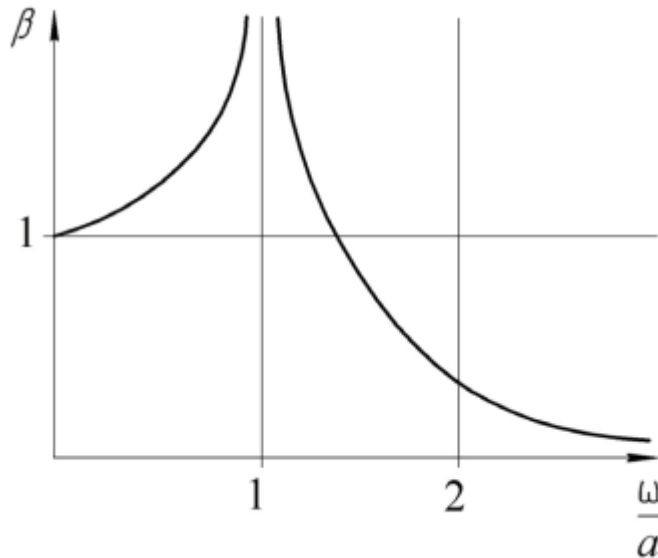


Рисунок 3 – Залежність динамічного коефіцієнта β від відношення ω/a

З цього рисунка видно, що при $\omega/a = 1$, тобто при співпаданні частоти ω вимушених коливань з частотою власних коливань амплітуда коливань прямує до нескінченності. Має місце так званий резонанс. Вираз (3.8) описує тільки вимушені коливання нав'язані збуджуючою дією на систему відцентрової сили з частотою ω . У загальному випадку прикладання збуджуючої дії викличе і власні коливання системи, які описуються першими двома доданками (3.7). Таким чином, дійсний рух являє собою накладання двох гармонічних рухів, що мають різні амплітуди і різні частоти, що в результаті призведе до дуже складного за своїм характером руху. Однак, завдяки впливу затухання, неврахованого при виведенні (3.7), вільні коливання зникають в короткий час. Тому в розв'язку залишається тільки та частина, яка відноситься до вимушених коливань, що встановилися та постійно підтримуються збуджуючою силою.

На рис. 4 представлений окремий випадок залежності переміщення від часу. На штрихову лінію, що представляє вимушені коливання з круговою частотою ω , накладаються вільні коливання з більш високою частотою a та амплітудою, що зменшується внаслідок загасання. Початковий період цього руху, в якому присутні вільні коливання, зазвичай називають неустановленим станом.

Вимушені коливання з демпфуванням описуються рівнянням:

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + j \cdot x = Q \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

де b – коефіцієнт демпфування, Н·с/м (кг/с).

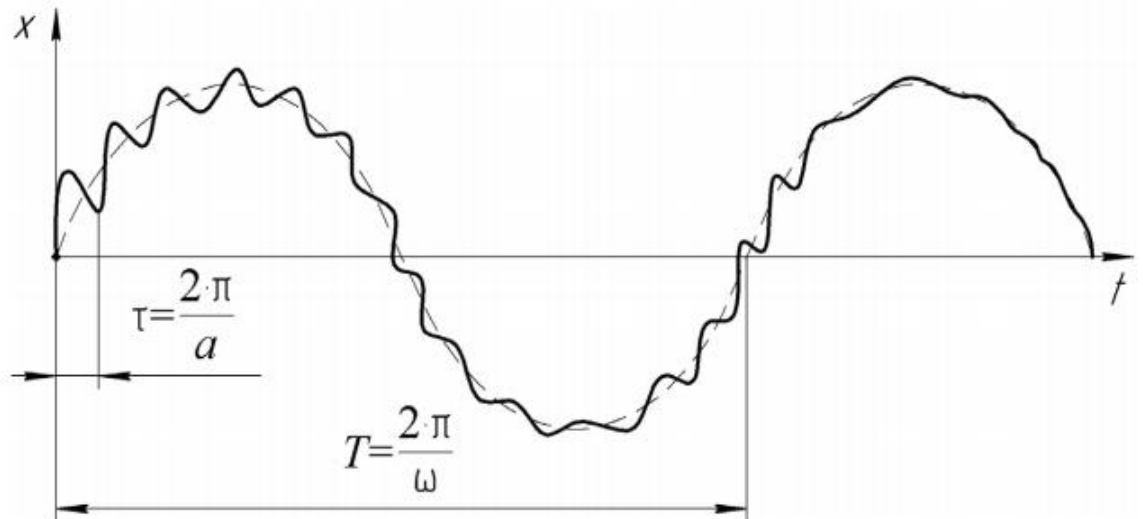


Рисунок 4 – Вимушені коливання з демпфуванням

Моделювання коливань згідно (3.9) виконується методом пониження похідної. Крім моделювання коливань у пакеті VisSim студенти виконують аналіз коливальних систем, описаних рівняннями (3.3) і (3.9) в пакеті *MathCad* побудовою залежності коефіцієнта динамічності β від демпфування і відношення частоти зовнішнього впливу до частоти власних коливань системи. Відомо з теорії автоматичного керування, що при гармонійному зовнішньому впливі згідно (3.9) в процесі, що установився, після загасання вільних коливань, вихідний сигнал x представляє собою гармонійну функцію:

$$x(\omega) = A(\omega) \cdot Q \cdot \cos(\omega \cdot t + a),$$

де $A(\omega)$ – амплітудно-частотна характеристика системи вимушених коливань.

Отже $A(\omega) \cdot Q = x_d$ – амплітуда сталих вимушених коливань.

Якщо в рівнянні (3.9) зовнішній вплив прикладено статично, то $\omega = 0$, $\ddot{x} = \dot{x} = 0$, а вихідний сигнал

$$x_{ст} = \frac{Q}{j} = Q \cdot e_{ст},$$

де $e_{ст}$ – податливість системи.

Відношення x_d до $x_{ст}$ називають коефіцієнтом динамічності β :

$$\beta = \frac{x_d}{x_{ст}} = \frac{A(\omega) \cdot Q}{Q \cdot e_{ст}} = \frac{A(\omega)}{e_{ст}}. \quad (3.10)$$

$A(\omega)$ шукаємо з рівняння (3.9), перетворивши його поділивши всі його доданки на j :

$$T^2 \cdot \ddot{x} + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot \dot{x} + x = e_{cm} \cdot z, \quad (3.11)$$

де z – зовнішній сигнал $\cos(\omega t)$;

T – постійна часу, с; $T = 1/a$;

a – частота власних коливань, рад/с;

$$a = \sqrt{\frac{j}{m}}; \quad \xi = \frac{b}{2 \cdot T \cdot j}.$$

Передаточна функція системи, що описана (3.11), наступна:

$$W(s) = \frac{x(s)}{z(s)} = \frac{e_{cm}}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1}$$

Перейшовши від динамічної передаточної функції $W(s)$ до частотної $W(i\omega)$, виділивши в ній дійсну $Re(\omega)$ і уявну $Im(\omega)$ частини, можна знайти $A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}$. В результаті отримаємо:

$$A(\omega) = \frac{e_{cm}}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}}.$$

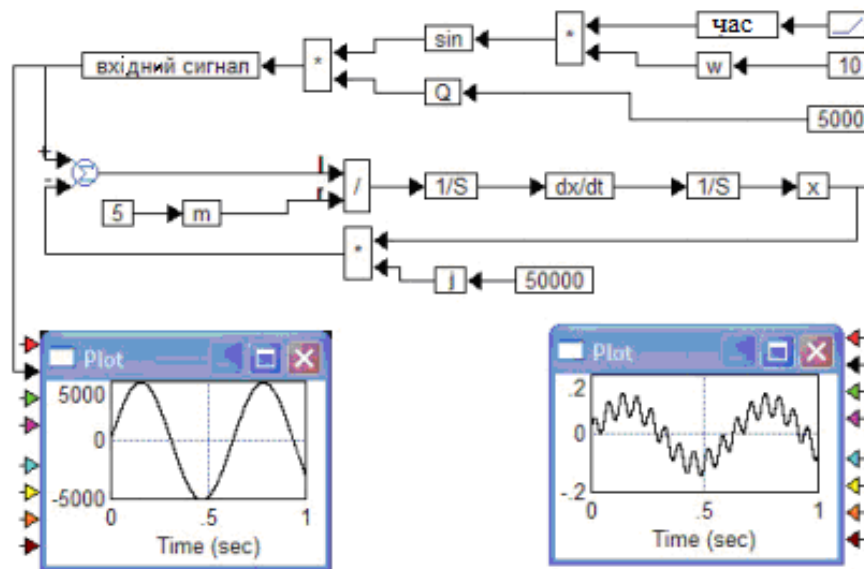
Коефіцієнт динамічності β отримаємо з (3.10), враховуючи, що $T = 1/a$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}},$$

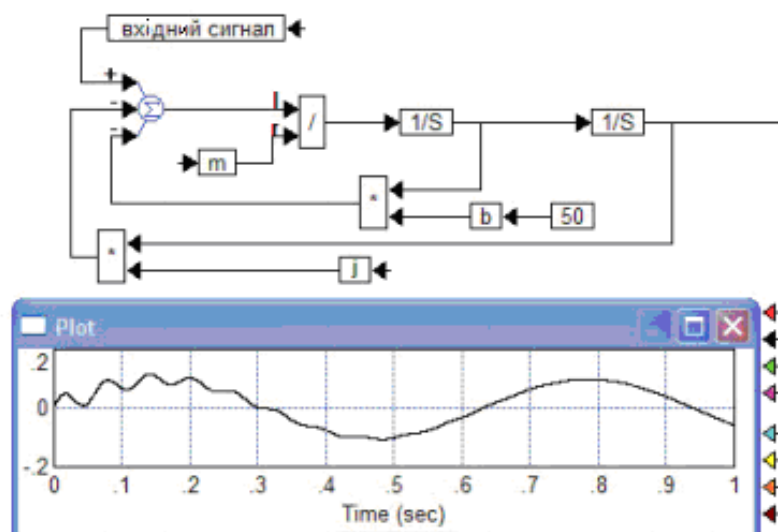
В являється функцією відношення ω/a величини ζ – коефіцієнт демпфування.

2 Приклад моделювання динамічної системи

Приклад моделювання вимушених коливань згідно (3.3) і (3.9) виконаний для наступних умов: $m = 5$ кг; $j = 5 \cdot 10^4$ Н/м; $Q = 5000$ Н; $\omega = 10$ рад/с; $x = 0,002$ м; $b = 50$ Н·с / м наведено на рис.5. Приклад побудови залежностей коефіцієнта динамічності β від відношення ω/a , яке позначено літерою k коефіцієнт демпфування ξ приведений на рис. 6. З рис. 6 видно, що при співпаданні частот зовнішнього впливу ω і власних коливань, тобто при $k = \omega/a = 1$, коефіцієнт динамічності досягає максимуму, а при $\xi = 0$ він прямує до нескінченності.



Вимушені коливання без демпфування



Вимушені коливання із демпфуванням

Рисунок 5 – Моделювання вимушених коливань в пакеті VisSim

3 Практична частина

3.1 Студенти виконують набір блок-схем моделювання вимушених коливань в пакеті VisSim при незмінному вхідному для всіх варіантів сигналі $Q \cdot \sin(\omega \cdot t)$ де, $Q = 5000$ Н, $\omega = 10$ рад/с;

3.2 Вихідні параметри коливальних систем студенти вибирають з табл. 1 відповідно до свого варіанту.

3.3 Набрані блок-схеми студенти замальовують або роздруковують з монітора ЕОМ.

3.4 Студенти будують залежності, β , (ω/a) , ξ в пакеті MathCad, міняючи ω/a в межах від нуля до трьох, а ξ від нуля до одиниці і також замальовують в звіт про роботу або копіюють програму розрахунку і отримані графіки.

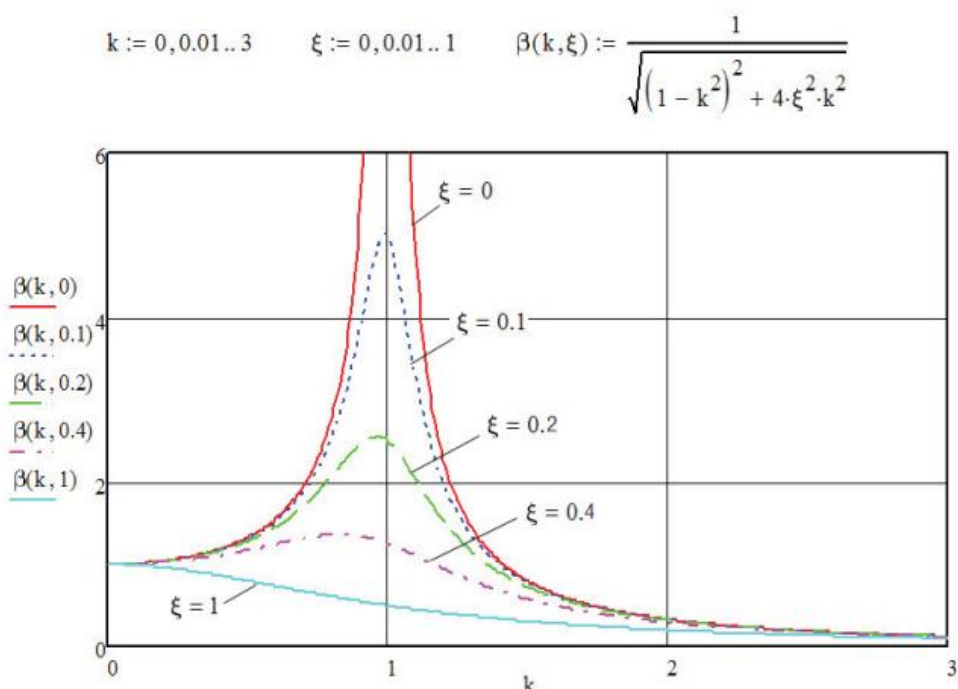


Рисунок 6 – Залежність коефіцієнта динамічності β від відношення k частоти зовнішньої дії до частоти власних коливань

Таблиця 1 – Початкові дані для моделювання коливань.

№ варіанта	Вихідні дані				
1	5	20	$5 \cdot 10^4$	0,002	5
2	10	10	$5 \cdot 10^4$	0,004	6
3	20	20	$5 \cdot 10^4$	0,002	7
4	30	15	$1 \cdot 10^5$	0,004	5
5	40	10	$5 \cdot 10^4$	0,003	4
6	25	25	$1 \cdot 10^5$	0,002	3,5
7	15	15	$5 \cdot 10^4$	0,0035	6,5
8	35	10	$5 \cdot 10^4$	0,003	6

Продовження таб. 1.

9	20	15	$5 \cdot 10^4$	0,004	5,5
10	30	20	$4 \cdot 10^4$	0,003	8
11	24	10	$5 \cdot 10^4$	0,002	8
12	33	20	$5 \cdot 10^4$	0,003	6
13	15	20	$5 \cdot 10^4$	0,0025	4
14	7	15	$5 \cdot 10^4$	0,001	5
15	22	18	$5 \cdot 10^4$	0,002	7
16	35	20	$5 \cdot 10^4$	0,001	6
17	30	20	$5 \cdot 10^4$	0,0015	4
18	7	40	$5 \cdot 10^4$	0,002	7
19	5	20	$5 \cdot 10^4$	0,002	5

Звіт до лабораторної роботи повинен містити:

1. Тему та мету роботи.
2. Короткі теоретичні відомості та початкові дані для розрахунків.
3. Алгоритм виконання роботи.
4. Блок-схеми моделювання виконані у *VisSim* та графіки результатів моделювання.
5. Висновки по роботі.

Контрольні питання.

1. Назвіть основні шляхи підвищення якості токарної обробки деталей.
2. Яке явище має місце при співпаданні частоти вимушених коливань з частотою власних коливань?
3. Від яких параметрів залежить рух системи при вільних коливаннях?
4. За яких умов рух системи називають вимушеними коливаннями?
5. Що називають неусталеним станом системи?